

УДК 631.362:532

До розрахунку пористості шару зерноsumіші на плоскому віброрешеті

Л.М. Тіщенко, В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський

*Харківський національний технічний університет сільського господарства
імені Петра Василенка (м. Харків, Україна)*

Метою роботи є розробка графічного способу визначення пористості рухомого шару зерноsumіші на плоскому віброрешеті, нахиленому під деяким кутом до горизонту. Для досягнення поставленої мети побудовано аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння другого порядку, яке раніше інтегрували числовими методами на комп'ютері. Цей розв'язок подано у вигляді невласного інтеграла другого роду, що має інтегровану сингулярність. Порядок степеневі сингулярності дорівнює 1/3. Переходом до безрозмірних змінних отримано у графічній формі залежність величини інтеграла від змінної верхньої межі інтегрування. Побудований графік дає можливість обчислювати концентрацію зернових частинок (або питому масу) улюб'яній точці по товщині шару сепарованої зерноsumіші на плоскому віброрешеті. Для цього потрібно знати лише коефіцієнти вихідного диференціального рівняння, які залежать від параметрів коливаний решета, кута його нахилу до горизонту та від фізико-механічних характеристик зерноsumіші. На конкретних числових прикладах проілюстровано досить високу точність запропонованого графічного способу розрахунку гарною узгодженістю результатів, до яких він призводить, з відомими результатами, одержаними числовим інтегруванням нелінійного диференціального рівняння. Встановлено, що запропонований спосіб придатний також для ідентифікації параметрів математичної моделі при заміреній зміні концентрації зернових частинок по товщині сепарованого шару зерноsumіші. Отже розроблений графічний спосіб є досить універсальним і може служити альтернативою відомим числовим методам розрахунку. Він не потребує громіздких обчислень і досить простий у використанні. При реалізації методу доцільно вести табличну форму запису.

Ключові слова: концентрація зернових частинок, пористість зерноsumіші, диференціальне рівняння, аналітичний розв'язок, невласний інтеграл, графічний спосіб розрахунку.

Вступ. У математичних моделях гравітаційних течій сипких матеріалів по нахиленій площині зазвичай враховують зміну концентрації зернових частинок або зміну пористості середовища по товщині рухомого шару [1-4]. По аналогії, це роблять і в роботах [5-7], моделюючи рух сепарованих зерноsumішей по поверхнях віброрешіт, де додатково враховують і механічні коливання в сипкому середовищі. Для цього на комп'ютері числовими методами розв'язують задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує зміну концентрації зернових частинок по товщині вібро-сепарованого шару зерноsumіші.

На відміну від згаданих публікацій, тут пропонується інший спосіб визначення зміни концентрації зернових частинок або наведеної неоднорідності, що виникає внаслідок механічних коливаний сипкого середовища та дії сили гравітації. Він ґрунтується на побудові аналітичного розв'язку згаданої задачі Коші у вигляді невласного інтеграла другого роду, завдяки чому розрахунок концентрації зернових частинок або пористості зерноsumіші зводиться до використання спеціального універсального безрозмірного графіка, який придатний і для проведення ідентифікації коефіцієнтів нелінійного диференціального

рівняння. Таким чином, відомий комп'ютерний спосіб розрахунку з конкретними числовими даними [5-7] тут замінюється універсальним графічним способом, який досить простий в користуванні.

Метою роботи є розробка графічного способу розрахунку пористості зерноsumіші, сепарованої на плоскому віброрешеті.

Нелінійне диференціальне рівняння і його аналітичний розв'язок. У відповідності з розрахунковою схемою, що подана на рис. 1, зміна концентрації зернових частинок у зерноsumіші по координаті ou описується диференціальним рівнянням [6, 7]:

$$\frac{d}{dy} \left[\alpha \psi \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \right] - \gamma g v \cos \theta = 0. \quad (1)$$

Тут α – феноменологічний коефіцієнт; ψ – множник, який залежить від параметрів механічних коливаний решета і коефіцієнта внутрішнього сухого тертя в суміші; v – концентрація зернових частинок, як функція y ; γ – питома маса матеріалу твердої частинки; g – прискорення вільного падіння; θ – кут нахилу решета до горизонту.

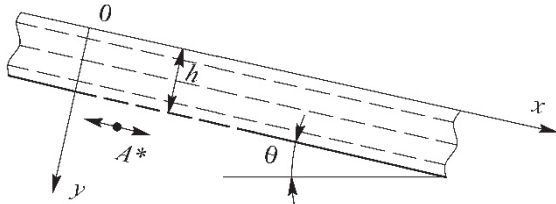


Рис. 1. Розрахункова схема руху шару зернової суміші на плоскому віброрешеті

Початковими умовами до (1) в [6, 7] приймають:

$$v(0) = v_0; \quad \left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Вважаючи множники α, ψ, γ , незалежними від y , подамо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{d^2v}{dy^2} \cdot \frac{dv}{dy} = \beta v, \quad (3)$$

де
$$\beta = \frac{\gamma g \cos \theta}{2\alpha \cdot \psi}.$$

Уведемо позначення $\frac{dv}{dy} = \xi$. Тоді:

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\xi}{dv} \cdot \frac{dv}{dy} = \xi \frac{d\xi}{dv}$$

і (3) зводиться до:

$$\xi^2 \frac{d\xi}{dv} = \beta v. \quad (4)$$

Проінтегрувавши (4), отримуємо:

$$\xi^3 = \frac{3}{2} \beta v^2 + c_1. \quad (5)$$

Розв'язок (5) задовольняє другій початковій умові в (2), коли:

$$c_1 = -\frac{3}{2} \beta v_0^2.$$

Отже, перший інтеграл (3) набуває форму:

$$\xi = \frac{dv}{dy} = \left[\frac{3}{2} \beta (v^2 - v_0^2) \right]^{1/3}.$$

Проінтегрувавши цей вираз, з урахуванням першої умови в (2), одержуємо аналітичний розв'язок нелінійної задачі Коші:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt[3]{v^2 - v_0^2}} = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{2}} y.$$

Далі уведемо безрозмірну змінну: $\zeta = v/v_0$. Тоді:

$$J(\zeta) = \int_1^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt[3]{\zeta^2 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{2v_0}} y. \quad (6)$$

Невласний інтеграл в (6) не виражається через відомі функції. Тому його доводиться інтегрувати числовими методами на комп'ютері. Для цього слід, інтегруючи частинами, вираз (6) звести до вигляду:

$$J(\zeta) = \frac{3}{2} \left[\frac{(\zeta-1)^2}{\zeta+1} \right]^{1/3} + \frac{1}{2} \int_1^\zeta \left[\frac{(\zeta-1)}{(\zeta+1)^2} \right]^{2/3} d\zeta.$$

Тоді підінтегральна функція буде обмеженою на всьому проміжку інтегрування, яке можна проводити любым із числових методів [9].

Але для практичних розрахунків зручніше використати графіки $J(\zeta)$, що зображені на рис. 2 або на рис. 3. Другий доцільно використовувати при малих змінах пористості, коли значення ζ близькі до одиниці.

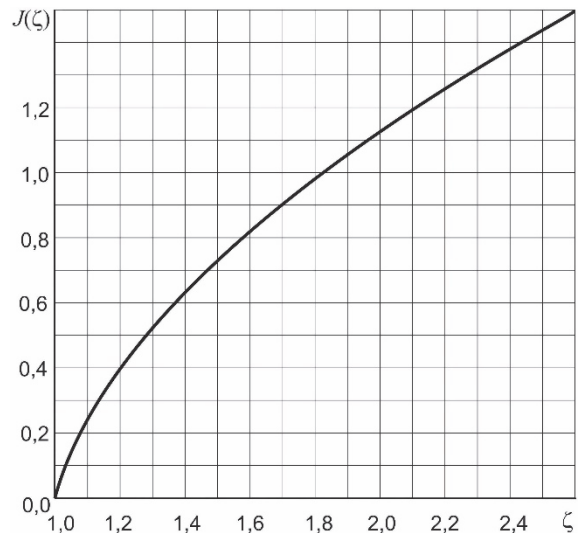


Рис. 2. До розрахунку пористості шару суміші

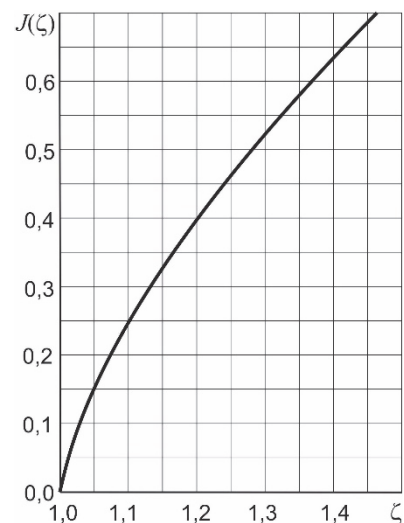


Рис. 3. Графік $J(\zeta)$ при ζ близьких до одиниці

Розглянемо приклади розрахунку. Для порівняння результатів, одержаних різними способами, використаємо графіки на рис. 4, отримані числовим інтегруванням диференціального рівняння (1) в роботі [6, гл. 2, рис. 2.4]. Вони підтверджені експериментально в [8].

Приклад 1. Виходячи з графіка 1 на рис. 4, приймаємо: $v(0) = v_0 = 0,32$; $v(h) = 0,425$. Отже, при $y^* = y/h = 1$ маємо: $\zeta = v(h)/v_0 = 1,328$. Йому на рис. 3 відповідає: $J(\zeta) = 0,552$. Далі, враховуючи лінійну залежність $J(\zeta)$ від y , записуємо в табл. 1 значення $J(\zeta)$ для інших y^* і по графіку на рис. 3 знаходимо відповідні їм значення ζ , як абсциси точок при відомих їх ординатах. Потім по формулі:

$$\varepsilon = 1 - \zeta \cdot v_0$$

обчислюємо значення пористості ε . Результати обчислень ε для різних значень y^* , записані в табл. 1, добре узгоджуються з тими ε , що на графіку 1 на рис. 4.

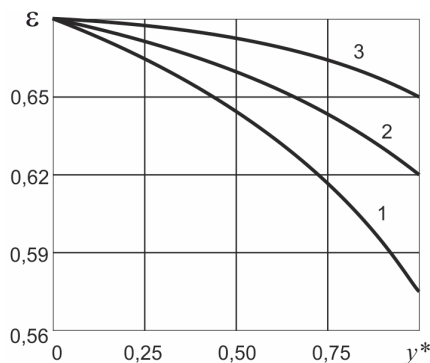


Рис. 4. Залежності ε від y , одержані числовим інтегруванням диференціального рівняння (1) в [6]

Таблиця 1. Значення ε при різних y^*
($v(h) = 0,425$)

y^*	$J(\zeta)$	ζ	ε	v
0,00	0,000	1,000	0,680	0,320
0,25	0,138	1,040	0,667	0,333
0,50	0,276	1,113	0,644	0,356
0,75	0,414	1,210	0,613	0,387
1,00	0,552	1,328	0,575	0,425

Приклад 2. Виходячи з графіка 2 на рис. 4, приймаємо: $v(0) = v_0 = 0,32$; $v(h) = 0,38$. Тоді при $y^* = 1$ маємо: $\zeta = v(h)/v_0 = 1,188$. Йому на

рис. 3 відповідає: $J(\zeta) = 0,388$. Далі знаходимо $J(\zeta)$, ζ і ε для інших y^* . Результати розрахунків заносимо в табл. 2.

Таблиця 2. Значення ε при різних y^*
($v(h) = 0,38$)

y^*	$J(\zeta)$	ζ	ε	v
0,00	0,000	1,000	0,680	0,320
0,25	0,097	1,023	0,673	0,327
0,50	0,194	1,066	0,659	0,341
0,75	0,291	1,123	0,641	0,359
1,00	0,388	1,188	0,620	0,380

Одержані тут точки теж близькі до відповідних точок графіка 2 на рис. 4.

Отже, викладений графічний спосіб розрахунку може замінити числове інтегрування нелінійного диференціального рівняння, що проводили в [6,7].

Далі покажемо, що подані на рис. 2 і рис. 3 графіки можна використовувати і для ідентифікації коефіцієнтів вихідного диференціального рівняння. Нехай за результатами вимірювань зміни пористості шару зерноsumіші товщиною $h = 0,007$ м одержано графік 3 на рис. 4. Тоді при $y = h$ маємо: $\zeta = 0,35/0,32 = 1,094$. Для цього ζ по графіку на рис. 3 знаходимо $J_*(\zeta) = 0,245$. Із формули (6) витікає, що:

$$\beta = \frac{2v_0}{3} \left[\frac{J_*(h)}{h} \right]^3$$

Тому, в даному випадку:

$$\beta = \frac{2 \cdot 0,32}{3} \left[\frac{0,245}{0,007} \right]^3 = 9146,667 \text{ м}^{-3}$$

Це значення коефіцієнта диференціального рівняння (4). Воно дає можливість знайти реологічну сталу α , коли відомі γ , θ , ψ , бо

$$\alpha = \frac{\gamma g \cos \theta}{2\beta\psi}$$

Таким чином, графіки на рис. 2 і рис. 3 придатні також і для ідентифікації коефіцієнта β у диференціальному рівнянні (3).

Висновки. Розроблений графічний метод розрахунку пористості шару зерноsumіші на плоскому віброрешеті може служити альтернативою числовому розв'язанню цієї задачі. Метод не потребує громіздких обчислень, досить точний і простий у використанні.

Література

1. Долгунин В.Н. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов: техника изменения, закономерности, технологическое применение / В.Н. Долгунин, В.Я. Борщев. – М.: Машиностроение, 2005. – 73 с.
2. Гудмен М. Две задачи о гравитационном течении гранулированных материалов / М. Гудмен, С. Коун // Механика гранулированных сред: теория быстрых движений: сб. статей; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – С. 65 - 85.
3. Savage S.B. Granular flows down rough Inclines – Review and Extension / S.B. Savage // Mechanics of granular Materials, Elsevier Science Publishers. – Amsterdam, 1983. – P. 261 - 282.
4. Сэвидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов в лотках и каналах / С. Сэвидж // Механика гранулированных сред: теория быстрых движений: сб. ст.; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – С. 86 -146.
5. Тищенко Л.Н. К исследованию движения зерновой смеси на решетке под действием вибраций / Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень // Науковий вісник НАУ. – Київ: НАУ, 2002. – Вип. 49. – С. 329 - 336.
6. Пивень М.В. Обоснование параметров процесса решетного сепарирования зерновых смесей: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.11 / М.В. Пивень. – Харьков: ХНТУСГ им. П. Василенко, 2006. – 260 с.
7. Тищенко Л.Н. Исследование послынного движения зерновых смесей на плоских вибрационных решетках / Л.Н. Тищенко, А.В. Миняйло, М.В. Пивень, С.А. Харченко // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків, 2007. – Вип. 59. Т. 1. – С. 69 - 76.
8. Тищенко Л.Н. Экспериментальные исследования внутрислоевых процессов в плоскорешетных вибрационных сепараторах / Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень // Вібрації в техніці та технологіях. – 2015. – № 4(80). – С. 206 - 211.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельников. – М.: Бинном, 2001. – 630 с.

Аннотация

К расчету пористости слоя зерносмеси на плоском виброрешете

Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский

Целью работы является разработка графического способа определения пористости движущегося слоя зерновой смеси на плоском виброрешете, наклоненном под некоторым углом к горизонту. Для достижения поставленной цели построено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, которое раньше интегрировали численными методами на компьютере. Это решение представлено в виде несобственного интеграла второго рода, с интегрируемой сингулярностью. Порядок степенной сингулярности равен $1/3$. Переходом к безразмерным переменным получена в графической форме зависимость величины интеграла от величины переменного верхнего предела интегрирования. Построенный график дает возможность вычислять концентрацию зерновых частиц (или удельную массу) в любой точке по толщине слоя сепарированной зерносмеси на плоском виброрешете. Для этого нужно знать только коэффициенты исходного дифференциального уравнения, которые зависят от параметров колебаний решета, угла его наклона к горизонту и от физико-механических характеристик зерносмеси. На конкретных численных примерах проиллюстрировано достаточно высокую точность предложенного графического способа расчета хорошей согласованностью результатов, к которым он приводит, с известными результатами численного интегрирования нелинейного дифференциального уравнения. Установлено, что предложенный способ пригоден также для идентификации параметров математической модели по замеренному изменению концентрации зерновых частиц по толщине сепарируемого слоя зерносмеси. Разработанный графический способ является достаточно универсальным и может быть альтернативой известным численным методам расчета. Он не требует громоздких вычислений и достаточно прост в применении. При реализации метода целесообразно вести табличную форму записи результатов.

Ключевые слова: концентрация зерновых частиц, пористость зерносмеси, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое решение, несобственный интеграл, графический способ расчета.

Abstract

To calculation of the porosity grain layer on a flat vibrating sieve

L.M. Tishchenko, V.P. Olshansky, S.V. Olshansky

In article the graphic method of porosity determination of a moving layer of a grain compound on a plane vibrosieve which is tilted under some angle to the horizon has been described. For achievement of a goal the analytical solution of a non-linear differential equation of the second order was constructed. It has been integrated by numerical methods on the computer earlier. This decision has been presented in the form of the improper integral of the second kind with integrable singularity. The order of a degree singularity was equal to 1/3. Transition to the dimensionless variables received in the graphic form dependence of value of integral on value of variable upper limit of integration. The diagram which gives the chance to calculate concentration of grain particles (or specific weight) in any point on thickness of a layer of the separated grainmixture on a plane vibrosieve was constructed. For this purpose it is necessary to know only coefficients of the input differential equation which depend on parameters of oscillations of a sieve and angle of its inclination to the horizon and on physicomechanical characteristics of a grainmixture. On specific numerical examples it was illustrated rather high accuracy of the offered graphic method of calculation and good coherence of results. It results in good results of the known numerical integration of a non-linear differential equation. It is set that the offered method is suitable also for identification of parameters of a mathematical model on the measured change of concentration of grain particles on thickness of the separated grainmixture layer. The developed graphic method is rather universal and can be an alternative to the known numerical methods of calculation. The method doesn't require unwieldy computation and is rather simple in application. In case of implementation of a method it is expedient to carry the tabular form of record of results.

Keywords: *the concentration of grain particles, porosity, grain mixture, the non-linear differential equation, the analytical solution, the improper integral, the graphical method of calculation.*

Представлено від редакції: О.І. Завгородній / Presented on editorial: O.I. Zavgorodnij

Рецензент: М.В. Бакум / Reviewer: M.V. Bakum

Подано до редакції / Received: 12.04.2016