УДК 631.362:532

Про нелінійну модель потоку зерносуміші на плоскому віброрешеті

В.В. Бурлака[1], О.В. Ольшанський[2], М.В. Сліпченко[1], О.М. Малець[1]

[1] *Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка (м.Харків, Україна);*
[2]*Харківський державний університет харчування та торгівлі (м. Харків, Україна)*

Розглянуто установлений потік шару сепарованої зерносуміші на плоскому віброрешеті, нахиленому до горизонту. Прийнята нелінійна реологічна залежність типу Севіджа між дотичним напруженням у суміші та швидкістю деформацій зсуву. Побудовано замкнутий аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння руху, внаслідок чого отримано компактні розрахункові формули для обчислення швидкості потоку суміші та об'ємної продуктивності решета. З метою спрощення експериментів при визначенні реологічних констант математичної моделі, побудовано також аналітичний розв'язок оберненої задачі руху. Цей розв'язок дає можливість проводити ідентифікацію констант за даними вимірювань кінематичних параметрів потоку суміші для двох кутів нахилу решета до горизонту.

Ключові слова: *плоске віброрешето, сепарована зерносуміш, швидкість руху, квадратична реологічна залежність, ідентифікація коефіцієнтів моделі.*

Вступ. У континуальних моделях руху сипких матеріалів при відносно великих швидкостях гравітаційних течій зсуву, що властиво і сепарованим сумішам, на думку авторів [1-4], доцільно використовувати квадратичну реологічну залежність дотичного напруження у сипкому середовищі від швидкості деформацій зсуву. Виходячи з цього, тут в основу математичної моделі покладено нелінійний (квадратичний) зв'язок між дотичним напруженням і градієнтом швидкості усталеного потоку суміші в формі, що запропонований Севіджем [5-7]. За свідченням авторів [2] теоретичні результати, одержані з використанням квадратичної залежності [6], добре узгоджуються з експериментальними результатами в [8]. Тому є сенс з'ясувати можливості використання такої залежності в розрахунках руху сепарованої суміші на плоскому віброрешеті в умовах спільної дії гравітації та механічних коливань.

Метою роботи є виведення формул для обчислення швидкості усталеного руху й інших кінематичних характеристик потоку дрібнозернистої суміші по плоскому віброрешету. Ставиться також задача ідентифікації реологічних констант за даними вимірювання швидкості руху або об'ємної продуктивності решета при різних кутах його нахилу до горизонту.

Основна частина роботи. Щоб вивести нелінійне диференціальне рівняння сталої течії зерносуміші використаємо залежності з [9,10]:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy};\ u = \frac{\rho g}{2\mu}\sin\theta(h^2 - y^2) + u_0, \quad (1)$$

де τ – дотичне напруження; u – швидкість усталеного потоку суміші в напрямі вісі Ox, що показано на рис. 1; y – поперечна координата; ρ – осереднене значення питомої маси зерносуміші по товщині h рухомого шару; μ – динамічний коефіцієнт вібров'язкості суміші, який залежить від її фізико-механічних характеристик та від амплітуди і частоти коливань решета; θ – кут нахилу решета до горизонту; u_0 – швидкість ковзання суміші по поверхні решета; g - прискорення вільного падіння.

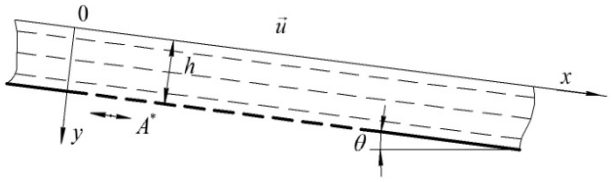

Рис. 1. Розрахункова схема руху шару зернової суміші на плоскому віброрешеті

Формули для обчислень μ надруковано в [9,10] і тут їх приводити не будем.

Із виразів (1) випливає, що:

$$\tau(y) = -\rho g \sin\theta\, y. \quad (2)$$

Цей лінійний розподіл τ по y можливий лише при сталих μ і ρ. Якщо враховувати залежності μ і ρ від *y*, то розподіл дотичного напруження по товщині рухомого шару буде

нелінійним, на що вказується в [2], але це суттєво ускладнює теорію.

Зв'язок дотичного напруження з градієнтом швидкості потоку задаємо у вигляді:

$$\tau = \left[\mu_* \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + f \cdot p(y) \right] sign\left(\frac{du}{dy} \right), \quad (3)$$

де μ_*, f – реологічні сталі; $p(y)$ – надлишковий внутрішній тиск у суміші.

Завдяки тому, що μ_*, f – const вираз (3) являється спрощеною залежністю Севіджа [2, 6].

Враховуючи, що [9, 10]:

$$p(y) = \rho g \cos\theta \, y, \quad \frac{du}{dy} < 0$$

та вирази (2), (3), приходимо до нелінійного рівняння руху:

$$\left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \frac{\rho g}{\mu_*} (\sin\theta - f \cos\theta) y. \quad (4)$$

Отже,

$$\frac{du}{dy} = -a y^{1/2}, \quad (5)$$

причому $a = \sqrt{\frac{\rho g}{\mu_*} (\sin\theta - f \cos\theta)}$.

Зазначимо, що рівняння (5), як і (4), має чинність, коли $\sin\theta - f\cos\theta > 0$. У супротивному випадку треба покласти $f = 0$.

Розв'язок рівняння (5), при крайовій умові $u(h) = u_0$, має вигляд:

$$u(y) = \frac{2}{3} a \left(h^{3/2} - y^{3/2} \right) + u_0. \quad (6)$$

Тут перший додаток правої частини описує розподіл швидкості по товщині рухомого шару, а другий не залежить від y.

Використовуючи (6), виводимо формули для обчислень середньої швидкості течії:

$$u_{cp} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{2}{5} a h^{3/2} + u_0$$

та об'ємної продуктивності решета з шириною робочої частини H:

$$Q = H h u_{cp} = \left(\frac{2}{5} a h^{3/2} + u_0 \right) hH. \quad (7)$$

Доданок u_0 можна визначити з крайової умови:

$$\lambda_1 u(h) + \lambda_2 = \lambda_1 u_0 + \lambda_2 = -\tau(h) = -\rho g h \sin\theta,$$

де λ_1, λ_2 сталі коефіцієнти. Вони залежать від технічного стану поверхні решета і фізико-механічних характеристик суміші [9,10].

Тоді, при $u_0 > 0$:

$$u(y) = \frac{2}{3} a \left(h^{3/2} - y^{3/2} \right) + \frac{\rho g h}{\lambda_1} \sin\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

При малих кутах θ можна покласти $u_0 = 0$. Цій умові також сприяє просіювання зерен через отвори в решеті, або воно пригальмовує ковзання шару суміші по поверхні решета.

Отже, обчислення основних кінематичних характеристик потоку зерносуміші, з використанням нелінійної залежності (3), зводиться до компактних розрахункових формул. Але при цьому треба знати величини коефіцієнтів μ_* і f, бо від них суттєво залежить узгодженість теорії з практикою.

Щоб спростити експериментальне визначення μ_* і f, розв'яжемо обернену задачу руху. Нехай при куті нахилу решета $\theta = \theta_1$: $u_0 = 0$, $h = h_1$, $u(0) = u_1$, а при куті $\theta = \theta_2$: $u_0 = 0$, $h = h_2$, $u(0) = u_2$. Підставивши записані величини в (6), одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$u_1 = \frac{2}{3} h_1^{3/2} \sqrt{\frac{\rho g}{\mu_*} (\sin\theta_1 - f\cos\theta_1)};$$

$$u_2 = \frac{2}{3} h_2^{3/2} \sqrt{\frac{\rho g}{\mu} (\sin\theta_2 - f\cos\theta_2)}.$$

Розв'язавши цю систему, виводимо формули ідентифікації реалогічних сталих:

$$\mu_* = \frac{4\rho g \sin(\theta_2 - \theta_1)}{9\left(\frac{u_2^2}{h_2^3}\cos\theta_1 - \frac{u_1^2}{h_1^3}\cos\theta_2 \right)};$$

$$f = \frac{\frac{u_2^2}{h_2^3}\sin\theta_1 - \frac{u_1^2}{h_1^3}\sin\theta_2}{\frac{u_2^2}{h_2^3}\cos\theta_1 - \frac{u_1^2}{h_1^3}\cos\theta_2}. \quad (8)$$

Отже, для обчислення реологічних коефіцієнтів, треба замірити товщини рухомого шару і швидкості потоку суміші на її вільній поверхні, при двох кутах нахилу решета до горизонту.

Визначення сталих можна також проводити за даними експериментальних вимірювань об'ємної продуктивності решета. Нехай при $\theta = \theta_1$: $u_0 = 0$, $h = h_1$, $Q = Q_1$, а при $\theta = \theta_2$: $u_0 = 0$, $h = h_2$, $Q = Q_2$. Тоді, користуючись (7), складаємо систему рівнянь:

© В.В. Бурлака, О.В. Ольшанський, М.В. Сліпченко, О.М. Малець, 2015
© V.V. Burlaka, O.V. Olshansky, M.V. Slipchenko, O.M. Malec, 2015

$$\frac{Q_1}{H}=\frac{2}{5}h_1^{5/2}\sqrt{\frac{\rho g}{\mu_*}\left(\sin\theta_1-f\cos\theta_1\right)};$$

$$\frac{Q_2}{H}=\frac{2}{5}h_2^{5/2}\sqrt{\frac{\rho g}{\mu_*}\left(\sin\theta_2-f\cos\theta_2\right)}.$$

Розв'язавши систему, отримуємо:

$$\mu_*=\frac{4\rho g\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)}{25\left(\frac{Q_2^2}{H^2h_2^5}\cos\theta_1-\frac{Q_1^2}{H^2h_1^5}\cos\theta_2\right)};$$

$$f=\frac{\frac{Q_2^2}{H^2h_2^5}\sin\theta_1-\frac{Q_1^2}{H^2h_1^5}\sin\theta_2}{\frac{Q_2^2}{H^2h_2^5}\cos\theta_1-\frac{Q_1^2}{H^2h_1^5}\cos\theta_2}. \qquad (9)$$

Таким чином, визначення реологічних констант тут не пов'язане з вимірюванням дотичного напруження в суміші.

Аналіз числових результатів. Для проведення розрахунків задавали: $\theta=8^{\circ}$, $\rho=750$ кг/м^3 та різні значення h, μ_* і f. Результати обчислень швидкості по формулі (6), на вільній поверхні суміші $y=0$, записано в табл.1.

Таблиця 1. Максимальні швидкості потоку

μ_*, Па·с^2	f	Товщина h рухомого шару, м		
		0,008	0,010	0,012
		Значення 10 $u(0)$, м/с		
0,005	0,005	2,12	2,96	3,89
0,005	0,050	1,73	2,42	3,18
0,005	0,100	1,16	1,62	2,13
0,010	0,005	1,50	2,10	2,75
0,010	0,050	1,23	1,71	2,25
0,010	0,100	0,82	1,15	1,51
0,015	0,005	1,22	1,71	2,25
0,015	0,050	1,00	1,40	1,84
0,015	0,100	0,67	0,94	1,23

В табл. 2 вказано результати обчислень Q/H по формулі (7).

Розрахунки підтверджують, що кінематичні характеристики потоку суттєво залежать не тільки від товщини рухомого шару, а і від значень реологічних сталих. Тому треба належним чином задавати їх, щоб була узгодженість теорії з експериментом.

Зупинемось на визначенні реологічних коефіцієнтів при відомих кінематичних характеристиках потоку.

Нехай $u_0=0$, $\rho=750$ кг/м^3 і за результатами вимірювань при $\theta=\theta_1=9^{\circ}$: $h=h_1=0,012$ м; $u(0)=u_1=0,28$ м/с, а при $\theta=\theta_2=6^{\circ}$: $h=h_2=0,013$ м; $u(0)=u_2=0,24$ м/с. Тоді, підставивши вказані числа в (8), одержуємо: $\mu_*\approx 0,0089$ Па·с^2, $f\approx 0,0333$. Про високу точність цих μ_* і f легко переконатись підстановкою їх у формулу (6).

Таблиця 2. Об'ємні продуктивності решета

μ_*, Па·с^2	f	Товщина h рухомого шару, м		
		0,008	0,010	0,012
		Значення 10^3 Q/H, м^2/с		
0,005	0,005	1,018	1,778	2,804
0,005	0,050	0,832	1,453	2,292
0,005	0,100	0,557	0,972	1,534
0,010	0,005	0,720	1,257	1,983
0,010	0,050	0,588	1,027	1,621
0,010	0,100	0,394	0,687	1,084
0,015	0,005	0,588	1,026	1,619
0,015	0,050	0,480	0,839	1,323
0,015	0,100	0,321	0,561	0,885

Оскільки, іноді зручніше, замість швидкості вимірювати продуктивність решета, розглянемо варіант ідентифікації констант з вимірюванням Q. Якщо при $\theta=\theta_1=8^{\circ}$: $h=h_1=0,01$ м; $Q/H=Q_1/H=1,027\cdot10^{-3}$ м^2/с, а при $\theta=\theta_2=5^{\circ}$: $h=h_2=0,011$ м; $Q/H=Q_2/H=0,841\cdot10^{-3}$ м^2/с, то обчислення по формулі (9) дають: $\mu_*\approx 0,0100$ Па·с^2; $f\approx 0,0500$. Саме такі значення μ_* і f підставили раніше в (7), щоб одержати $Q/H=1,027\cdot10^{-3}$ м^2/с, що записане в табл. 2.

З метою порівняння характеристик потоку, до яких призводять вихідна лінійна та розглянута нелінійна моделі, було проведено обчислення $u(y)$ по формулах (1) і (6) при $\theta=8^{\circ}$, $u_0=0$, $\rho=750$ кг/м^3, $h=0,012$ м, $\mu_*=0,01$ Па·с^2; $f=0,1$. Коефіцієнт вібров'язкості $\mu=0,48948$ Па·с задавали таким, щоб $u(0)$ були однаковими при їх обчисленні за двома різними формулами. Одержані профілі

швидкості по формулі (1) – пунктирна лінія, та по формулі (6) – суцільна лінія, показано на рис. 2.

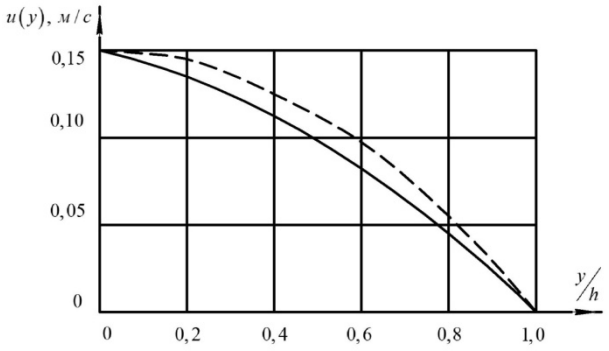

Рис. 2. Профілі швидкості потоку:
– – - формула (1) ; —— - формула (2)

Як бачимо, лінійна теорія дає дещо завищені значення швидкості. Тому розрахована за лінійною теорією продуктивність решета $Q/H = 1,2050 \cdot 10^{-3}$ м^2/с теж більша, ніж за нелінійною, де $Q/H = 1,0844 \cdot 10^{-3}$ м^2/с. Але принципових, або якісних, відмінностей у результатах, що дають розглянуті лінійна і нелінійна моделі, не спостерігається.

Висновки. Розглянута нелінійна модель руху призводить до компактних розрахункових формул. Використання їх дає можливість розраховувати не тільки основні кінематичні характеристики потоку зерносуміші, а і визначати реологічні коефіцієнти без експериментального вимірювання дотичних напружень у рухомому середовищі, що спрощує проведення експериментів.

Література

1. Bagnold R.A. Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // Proc. Roy. Soc. London, 1954. – Vol. 225. – P. 49 - 63.

2. Долгунин В.Н. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов: техника измерения, закономерности, технологическое применение / В.Н. Долгунин, В.Я. Борщев – М.: Машиностроение, 2005. – 73с.

3. Шваб А.В. Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды / А.В. Шваб, М.С. Марценко / Вестник Томского государственного университета, 2011. – №3(15). – С. 110 - 116.

4. Тищенко Л.Н. Способ повышения эффективности пневмосепарирования зерновых смесей в пневмосепарирующих устройствах / Л.Н. Тищенко, С.А Харченко, Ю.П. Борщ и др. // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва, 2014. – Вип. 148. – С. 150-158.

5. Savage S., Jeffrey D. The stress tensor in a granular flow at high shear rates Journal Fluid Mech., 1981. Vol. 110, p.p. 255 - 272.

6. Savage S.B. Granular flows down rough Inclines – Review and extension // Mech. of granular materials, Elsevier Scince publishers, Amsterdam, 1983. – P. 261 - 282.

7. Сэвидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов в лотках и каналах. // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений/ Сб. ст.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – С. 86 - 146.

8. Ishida M. Velocity destributions in the flow of particles in a inclined open channel / M. Ishida, T. Shirai // J. Chem. End. Jpn. 1979. Vol. 12. – P. 45 - 50.

9. Тищенко Л.Н. Гидродинамика сепарирования зерна / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2010. – 174 с.

10. Тищенко Л.Н. Виброрешетная сепарація зерновых смесей / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 280 с.

Аннотация

О нелинейной модели потока зерносмеси на плоском виброрешете

В.В. Бурлака, А.В. Ольшанский, М.В. Слипченко, О.Н. Малец

Рассмотрено установившееся течение слоя сепарированной зерносмеси на плоском виброрешете, наклоненном к горизонту. Принята нелинейная реологическая зависимость типа Севиджа между касательным напряжением в смеси и скоростью деформаций сдвига. Построено замкнутое аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения движения, вследствие чего получено компактные формулы для вычисления скорости потока смеси и объемной производительности решета. С целью упрощения экспериментов при определении реологических констант математи-

© В.В. Бурлака, О.В. Ольшанський, М.В. Сліпченко, О.М. Малець, 2015
© V.V. Burlaka, O.V. Olshansky, M.V. Slipchenko, O.M. Malec, 2015

ческой модели, построено также аналитическое решение обратной задачи движения. Это решение дает возможность проводить идентификацию по результатам измерений кинематических параметров потока смеси при двух углах наклона решета к горизонту.

Ключевые слова*: плоское виброрешето, сепарированная зерносмесь, скорость потока, квадратичная реологическая зависимость, идентификация коэффициентов модели.*

Abstract

About nonlinear grain mixture flow model on a flat vibrosieve

V.V. Burlaka, O.V. Olshansky, M.V. Slipchenko, O.M. Malec

Steady flow of the separated grain mixture on a flat vibrosieve, inclined to the horizon was considered. The nonlinear rheological dependence of Savage type rheological between the shear stress in the mix and shear strain rate was adopted. A closed analytical solution of the nonlinear differential equations of motion was built, resulting in a compact formula for calculating the mixture flow rate and volumetric efficiency of the sieve was received. In order to simplify the experiments for determination of rheological constants of the mathematical model, the analytical solution of the return task of motion was built to. This solution makes it possible to carry out identification by results of measurements of kinematic parameters of mixture flow at two angles of inclination of the sieve to the horizon.

Keywords: *flat vibrosieve, separated grain mixture, flow velocity, quadratic rheological dependence, e identification of the model coefficients.*

Представлено: Л.М. Тіщенко / Presented by: L.M**. Tishchenko**
Рецензент: С.А. Харченко / Reviewer: S.O. Kharchenko
Подано до редакції / Received: 16.09.2015