

УДК 539.3:534.1

## Розрахунок нестационарних температурних полів у багатошаровому осклінні транспортних засобів

Н.В. Сметанкіна

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного  
НАН України (м. Харків, Україна)*

Запропоновано метод розрахунку нестационарних температурних полів у багатошаровому осклінні транспортних засобів при впливі імпульсних плівкових джерел тепла.

Багатошарове оскління розглядається як прямокутна багатошарова пластина, яка зібрана з ізотропних шарів сталої товщини. На бічній поверхні пластини підтримується нульова температура. На зовнішніх поверхнях відбувається конвективний теплообмін, а на границях контакту шарів розташовані плівкові джерела тепла.

Рівняння нестационарної теплопровідності для довільного шару пластини після перетворення Лапласа за часом зводиться до операторного рівняння. Так само перетворюються початкові і граничні умови. Розв'язок операторного рівняння шукаємо у вигляді добутку трьох функцій від просторових координат, що дозволяє перейти до системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок цієї системи можна записати у вигляді подвійного тригонометричного ряду з урахуванням граничних умов на бічній поверхні пластини. Коефіцієнти розвинення у ряд визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка формується з граничних умов на зовнішніх поверхнях та границях контакту шарів. Права частина системи містить коефіцієнти розвинення функцій міжшарових джерел тепла. Після визначення коефіцієнтів оригінал шуканої функції знаходиться за другою теоремою розкладання, а розв'язок задачі має вигляд подвійного тригонометричного ряду.

Як приклад розв'язана задача нестационарної теплопровідності для п'ятишарового елемента оскління літака при нагріванні плівковим джерелом тепла. Джерело має прямокутну форму і розташоване між першим та другим шарами елемента оскління. Проведено порівнювальний аналіз розподілу температури вздовж товщини елемента з результатами, одержаними іншими методами.

Запропонований підхід може бути використаний при проектуванні безпечного багатошарового оскління різних транспортних засобів в умовах експлуатаційних та аварійних термосилових навантажень.

**Ключові слова:** *безпечне багатошарове оскління, нестационарна теплопровідність, плівкове джерело тепла.*

**Постановка проблеми.** Однією з актуальних задач у сучасній техніці є задача достовірного визначення теплового стану елементів конструкцій. Від її успішного розв'язання залежить надійність і ефективність роботи елементів різних конструкцій, які часто мають неоднорідну структуру.

Сучасне обігрівне скло літака є складною великогабаритною багатошаровою конструкцією. Її працездатність залежить в першу чергу від міцності і довговічності скляних елементів, оптимальних параметрів адгезійних шарів та конструкційних рішень, які б забезпечували необхідну термостійкість і міцність покривельного шару при циклічному навантаженні та дії екстремальних експлуатаційних факторів.

Необхідно відзначити, що при розрахунку температурних полів у багатошарових конструкціях виникають значні математичні труднощі. Це пов'язано з наявністю шарів, властивості яких істотно відрізняються, та

виконанням умов сполучення шарів з урахуванням внутрішніх джерел тепла.

**Аналіз публікацій за темою дослідження.** Практична робота з проектування захисного оскління транспортних засобів привела до створення ГОСТ Р 51136-2008 [1]. Даний стандарт поширюється на захисні багатошарові стекла, які призначені для захисту життя людини, забезпечення безпеки та надійності при зберіганні і транспортуванні матеріальних цінностей.

Огляд літературних джерел свідчить про те, що більшість публікацій присвячена розрахунку конструкцій в умовах стаціонарного нагрівання [2].

У статті [3] запропоновано постановки контактних задач теплопереносу й термопружності в шаруватих тілах, що опромінюються, зі складовими різної прозорості, зокрема при наявності тонких проміжних шарів, з урахуванням ефектів випромінювання на їх поверхнях, у частково прозорих областях і

граничах розділу шарів. Для опису поширення теплового випромінювання використані співвідношення феноменологічної теорії випромінювання для частково прозорих і непрозорих тел. При формулюванні теплових граничних і контактних умов розглянуті потоки, які обумовлені випромінюванням і поглинанням теплової енергії. Отримано умови ідеального теплового контакту при урахуванні ефектів випромінювання. Як приклад, розв'язана задача для двошарової пластини із шарами різної прозорості, що поєднані через тонкий проміжний шар.

У роботах [4, 5] розроблені різні чисельні й аналітичні методи розв'язання та отримано ряд фундаментальних результатів. У випадку нестационарних теплових впливів розглядаються одновимірні задачі теплопровідності необмежених багатошарових пластин [6] або застосовуються методи, які ґрунтуються на дискретизації області або контуру, наприклад, метод скінченних елементів [7]. Також пропонуються методи зведення тривимірної задачі теплопровідності до двовимірної шляхом застосування різного роду гіпотез про розподіл температури вздовж товщини пакету шарів [8]. У статті [9] аналітично, без залучення гіпотез про розподіл температури вздовж товщини пластини, розв'язана нестационарна задача теплопровідності для шаруватих прямокутних пластин при заданому розподілі температури на зовнішній і внутрішній поверхнях.

**Невирішеною проблемою** залишається розробка ефективних методів дослідження процесів теплопровідності багатошарового оскління з підвищеними параметрами термосилового навантаження при експлуатаційних та аварійних впливах.

**Метою роботи** є розробка методу розрахунку нестационарних температурних полів у багатошаровому осклінні літаків під впливом імпульсних розподілених міжшарових джерел тепла.

**Метод розв'язання.** Будемо розглядати багатошарове скло як прямокутну багатошарову шарнірно оперту пластину, яка зібрана з  $I$  ізотропних шарів сталої товщини  $h_i$  ( $i = \overline{1, I}$ ). Розміри пластини в напрямку координатних осей  $Ox$  і  $Oy$  позначимо  $A$  і  $B$  відповідно. Координата  $z_i$  змінюється у рамках кожного шару,  $0 \leq z_i \leq h_i$ . Як координату обираємо зовнішню поверхню першого шару пластини,  $z_1 = 0$ .

Запишемо рівняння теплопровідності для  $i$ -го шару пластини

$$T_t^i = a_i \Delta T^i, \quad i = \overline{1, I}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}, \quad (1)$$

де  $T^i = T^i(x, y, z_i, t)$  – температура;  $a_i = \lambda_i / (\rho_i c_i)$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\lambda_i$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\rho_i$  – питома вага,  $c_i$  – питома теплоємність матеріалу  $i$ -го шару,  $t$  – час. Приймаємо нульові початкові умови

$$T^i \Big|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, I}. \quad (2)$$

На бічній поверхні пластини підтримується нульова температура

$$T^i \Big|_{x=0, x=A} = T^i \Big|_{y=0, y=B} = 0, \quad i = \overline{1, I}. \quad (3)$$

На зовнішніх поверхнях пластини має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Запишемо граничні умови

$$T^1_{,z_1} - \frac{\alpha_B}{\lambda_1} T^1 = -\frac{\alpha_B}{\lambda_1} T_B, \quad z_1 = 0, \quad (4)$$

$$T^I_{,z_I} + \frac{\alpha_H}{\lambda_I} T^I = \frac{\alpha_H}{\lambda_I} T_H, \quad z_I = h_I, \quad (5)$$

і умови теплового сполучення шарів

$$T^i = T^{i+1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad (6)$$

$$\lambda_i T^i_{,z_i} = \lambda_{i+1} T^{i+1}_{,z_{i+1}} + q_S^i, \quad i = \overline{1, I-1}. \quad (7)$$

Тут  $\alpha_B$ ,  $\alpha_H$ ,  $T_B(x, y)$ ,  $T_H(x, y)$  – коефіцієнти конвективного теплообміну й температура навколишнього середовища на зовнішніх поверхнях пластини відповідно;  $q_S^i(x, y)$  – інтенсивності плівкових джерел тепла, які розташовані на границі контакту сусідніх шарів.

Після перетворення Лапласа за змінною  $t$  рівняння (1) зводиться до операторного рівняння

$$p T_i^* = a_i \Delta T_i^*, \quad i = \overline{1, I}, \quad (8)$$

де  $T_i^*(x, y, z_i)$  – зображення функції

$$T^i = T^i(x, y, z_i, t).$$

Перетворення початкових (2) і граничних (3) та (6) умов здійснюється простою заміною  $T^i$  на  $T_i^*$ . Граничні умови (4), (5) та (7) у просторі зображень набувають вигляду

$$T^*_{1,z_1} - \frac{\alpha_B}{\lambda_1} T^*_1 = -\frac{1}{p} \frac{\alpha_B}{\lambda_1} T_B, \quad z_1 = 0, \quad (9)$$

$$T^*_{I,z_I} + \frac{\alpha_H}{\lambda_I} T^*_I = \frac{\alpha_H}{\lambda_I} T_H, \quad z_I = h_I, \quad (10)$$

$$\lambda_i T^*_{i,z_i} = \lambda_{i+1} T^*_{i+1,z_{i+1}} + \frac{1}{p} q_S^i, \quad i = \overline{1, I}. \quad (11)$$

Розв'язок операторного рівняння (8) шукаємо у вигляді

$$T_i^*(x, y, z_i) = T^*(x)T^*(y)T_i^*(z_i).$$

Звідси

$$\frac{d^2}{dx^2}T^*(x)/T^*(x) + \frac{d^2}{dy^2}T^*(y)/T^*(y) + \frac{d^2}{dz_i^2}T^*(z_i)/T^*(z_i) = \frac{p}{a_i}.$$

Переходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d^2T^*(x)}{dx^2} &= -\alpha_m^2 T^*(x), \\ \frac{d^2T^*(y)}{dy^2} &= -\beta_n^2 T^*(y), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{d^2T^*(z_i)}{dz_i^2} - (p/a_i + \alpha_m^2 + \beta_n^2)T^*(z_i) = 0. \quad (13)$$

Після розв'язання рівняння (12) з урахуванням граничних умов (3) на контурі пластини, одержимо

$$T_m^*(x) = R_m \sin \alpha_m x, \quad T_n^*(y) = Q_n \sin \beta_n y,$$

де  $\alpha_m = m\pi/A$ ,  $\beta_n = n\pi/B$ .

Отже, розв'язок рівняння (8) можна записати у вигляді подвійного ряду

$$T_i^*(x, y, z_i) = \frac{4}{AB} \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{imn}^*(z_i) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y. \quad (14)$$

Функції  $T_B(x, y)$ ,  $T_H(x, y)$  і  $q_S^i(x, y)$  також розвиваються в ряд

$$\begin{aligned} T_B(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{Bmn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ T_H(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{Hmn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \end{aligned} \quad (15)$$

$$q_S^i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{Smn}^i \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} T_{Bmn} &= \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B T_B(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy, \\ T_{Hmn} &= \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B T_H(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy, \\ q_{Smn}^i &= \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B q_S^i(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Коефіцієнт  $T_{imn}^*(z_i)$  (14) визначається в результаті розв'язання перетвореного рівняння (13)

$$\frac{d^2T_{imn}^*(z_i)}{dz_i^2} + (k^2/a_i - \alpha_m^2 - \beta_n^2)T_{imn}^*(z_i) = 0. \quad (17)$$

Тут  $p = -k^2$ . Граничні умови (6), (9) - (11) також перетворюємо з урахуванням розвинень (15), (16), а загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$T_{imn}^*(z_i) = C_i \operatorname{ch} \eta_i z_i + D_i \operatorname{sh} \eta_i z_i$$

при  $k^2/a_i - \alpha_m^2 - \beta_n^2 < 0$ ,

$$T_{imn}^*(z_i) = C_i \cos \mu_i z_i + D_i \sin \mu_i z_i$$

при  $k^2/a_i - \alpha_m^2 - \beta_n^2 > 0$ ,

де  $\eta_i^2 = -(k^2/a_i - \alpha_m^2 - \beta_n^2)$ ,

$$\mu_i^2 = k^2/a_i - \alpha_m^2 - \beta_n^2, \quad i = \overline{1, I}.$$

Коефіцієнти  $C_i$  та  $D_i$  визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що формується із граничних умов. Структура цієї системи аналогічна структурі, отриманій в роботі [9]. Основна відмінність полягає у формуванні правої частини системи, що буде містити коефіцієнти розвинення функцій міжшарових джерел тепла  $q_{Smn}^i$ . Після визначення коефіцієнтів  $C_i$  і  $D_i$  оригінал шуканої функції  $T_{imn}(z_i, t)$  знаходимо за другою теоремою розкладання, а розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$T^i(x, y, z_i, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{imn}(z_i, t) \times \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

**Аналіз результатів чисельних досліджень.** Розглянемо нагрівання п'ятишарового прямокутного елемента оскління з розмірами у плані  $A = 0,64$  м,  $B = 0,32$  м (рис. 1). Між першим і другим шарами розмістимо плівкове джерело тепла потужністю  $q^0 = 3500$  Вт/м<sup>2</sup>,  $q_S^1(x, y) = q^0 H(t)$ , ( $H(t)$  – функція Хевисайда),  $x_1 = 0,07$  м,  $x_2 = 0,57$  м,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0,32$  м. Шари мають наступні теплофізичні та геометричні характеристики:  $\lambda_i = 1,61$  Вт/(м·°С),  $c_i = 750$  Дж/(кг·°С),  $\rho_i = 2500$  кг/м<sup>3</sup> ( $i = 1, 3, 5$ );  $\lambda_i = 0,17$  Вт/(м·°С),  $c_i = 1500$  Дж/(кг·°С),  $\rho_i = 1200$  кг/м<sup>3</sup> ( $i = 2, 4$ );  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = 3$  мм,  $h_3 = 15$  мм,  $h_4 = 2$  мм,  $h_5 = 20$  мм. Коефіцієнти конвектив-

ного теплообміну на зовнішній і внутрішній поверхні елемента оскління та температура зовнішнього і внутрішнього середовища є такими:  $\alpha_b = 80 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ ,  $\alpha_n = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ ,  $T_b = -20 \text{ °C}$  і  $T_n = 20 \text{ °C}$ .

На рис. 2 показані композиція шарів та розподіли температури вздовж товщини елемента оскління у точці  $x = A/2$ ,  $y = B/2$  у момент часу  $t = 10^4 \text{ с}$ , які одержані в результаті аналітичного розв'язання задачі запропонованим методом (лінія 1) і за допомогою розвинення шуканих функцій у ряд по поліномах Лежандра [10, 11] (лінія 2). Порівнювальний аналіз залежностей дозволяє зробити висновок про вірогідність отриманих результатів.

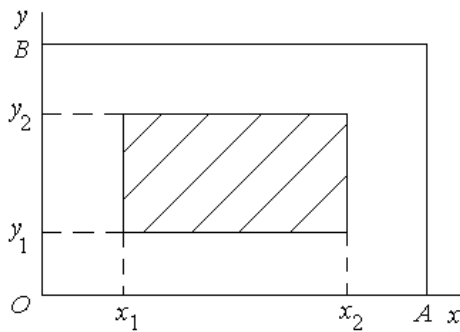


Рис. 1. Розрахункова схема елемента оскління

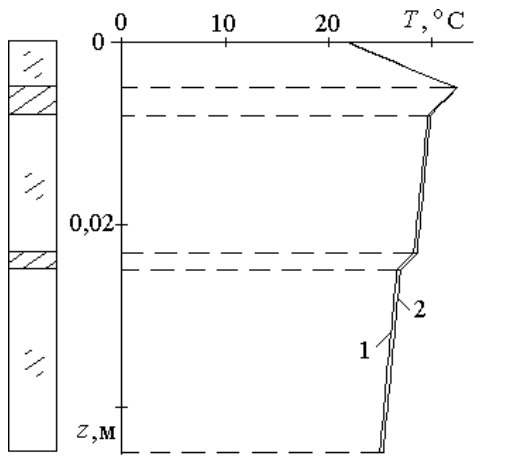


Рис. 2. Розподіл температури вздовж товщини елемента оскління

На рис. 3 подано зміння температури у часі в точці  $x = A/2$ ,  $y = B/2$ , на різних поверхнях шарів: лінія 1 –  $z_1 = 0$ , лінія 2 –  $z_1 = h_1$ , лінія 3 –  $z_1 = h_l$ .

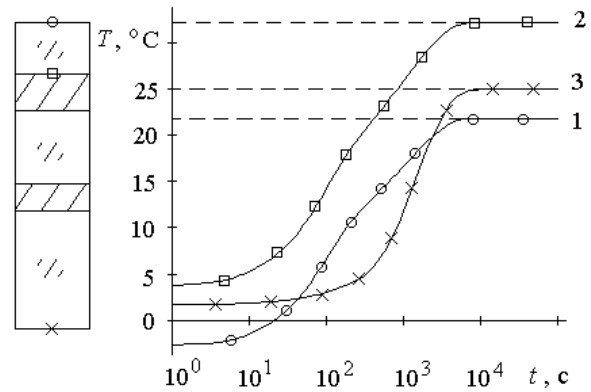


Рис. 3. Зміння температури у часі

Штриховими лініями на рисунку позначені значення температур на поверхнях шарів, які є розв'язками стаціонарної задачі [12]. Видно, що з моменту часу  $t = 10^4 \text{ с}$  температурне поле набуває стаціонарного характеру.

**Висновки й перспективи подальших досліджень.** Таким чином, розроблено метод розв'язання задач нестационарної теплопровідності у багатошаровому осклінні. Метод дозволяє вірогідно описати тепловий стан багатошарових елементів, які зібрані із шарів з різними механічними й геометричними характеристиками при впливі імпульсних розподілених джерел тепла.

Запропонований підхід може бути використаний при проектуванні безпечного багатошарового оскління з урахуванням оцінки закономірностей пошкодження, тривалості міцності та характеру руйнування елементів оскління в залежності від способу механічного, термічного і термохімічного оброблення за умов експлуатаційного або аварійного термосилового навантаження.

## Література

1. ГОСТ Р 51136-2008. Стекла защитные многослойные. Общие технические условия. Принято и введено в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 29 сентября 2008 г. № 222-ст – 15 с.

2. Heat transfer – a review of 2003 literature / R.J. Goldstein, W.E. Lbele, S.V. Patankar [et al.] // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2006. – Vol. 49, № 3 - 4. – P. 451 - 534.

3. Терлецкий Р.Ф. Моделирование термомеханического поведения слоистых тел с учетом эффектов излучения и поглощения тепловой энергии / Р.Ф. Терлецкий, О.П. Турий / Теор. и прикл. мех. – 2009. – № 45. – С. 19 - 31.

4. Рвачев В.Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена /

В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко.– Киев: Наук. думка.– 1978.– 138 с.

5. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.

6. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности / В.С. Зарубин. – М.: Энергоиздат, 1983. – 326 с.

7. Oguamanam D.C.D. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels / D.C.D. Oguamanam, J.S. Hansen, G.R. Heppler // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 1. – P. 49 - 56.

8. Демчук О.Н. Уточненная теория итерационного типа для решения задачи теплопроводности слоистых композитных оболочек и пластин / О.Н. Демчук // Доповіді НАН України. – 1998. – № 8. – С. 69 - 73.

9. Tanigawa Y. Thermal bending of laminated composite rectangular plates and nonhomogeneous plates due to partial heating / Y. Tanigawa, Y. Ootao, R. Kawamura // J. Thermal Stresses. – 1991. – Vol. 14, № 3. – P. 285 - 308.

10. Сметанкіна Н.В. Задача стационарной теплопроводности многослойных пластин со сложной формой / Н.В. Сметанкіна, Е.В. Свет, А.Н. Шупиков // Пробл. машиностроения. – 2004. – Т. 7, № 3. – С. 25 - 31.

11. Shupikov A.N. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates / A.N. Shupikov, N.V. Smetankina, Ye.V. Svet // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2007. – Vol. 129, – № 3. – P. 335 - 341.

12. Сметанкіна Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкіна. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011. – 376 с.

## Аннотация

### Расчет нестационарных температурных полей в многослойном остеклении транспортных средств

Н.В. Сметанкіна

Предложен метод расчета нестационарных температурных полей в многослойном остеклении транспортных средств при воздействии импульсных пленочных источников тепла.

Многослойное остекление рассматривается как прямоугольная многослойная пластина, которая собранная из изотропных слоев постоянной толщины. На боковой поверхности пластины поддерживается нулевая температура. На внешних поверхностях происходит конвективный теплообмен, а на границах контакта слоев расположены пленочные источники тепла.

Уравнение нестационарной теплопроводности для произвольного слоя пластины после преобразования Лапласа по времени сводится к операторному уравнению. Таким же образом преобразовываются начальные и граничные условия. Решение операторного уравнения ищем в виде произведения трех функций от пространственных координат, что позволяет перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение этой системы представляем в виде двойного тригонометрического ряда с учетом граничных условий на боковой поверхности пластины. Коэффициенты разложения в ряд определяются из системы линейных алгебраических уравнений, которая формируется из граничных условий на внешних поверхностях и границах контакта слоев. Правая часть системы содержит коэффициенты разложения функций межслойных источников тепла. После определения коэффициентов оригинал искомой функции находится по второй теореме разложения, а решение задачи имеет вид двойного тригонометрического ряда.

В качестве примера решена задача нестационарной теплопроводности для пятислойного элемента остекления самолета при нагреве пленочным источником тепла. Источник имеет прямоугольную форму и расположен между первым и вторым слоями элемента остекления. Проведен сравнительный анализ распределения температуры вдоль толщины элемента с результатами, полученным другим методом.

Предложенный подход может быть использован при проектировании безопасного многослойного остекления различных транспортных средств в условиях эксплуатационных и аварийных термосиловых нагрузений.

**Ключевые слова:** безопасное многослойное остекление, нестационарная теплопроводность, пленочный источник тепла.

**Abstract****Calculation of nonstationary temperature fields  
in multilayer glazing of vehicles****N.V. Smetankina**

A method for calculation of nonstationary thermal fields in a multilayer glazing of vehicles under the effect of impulse film heat sources is offered.

The multilayer glazing is considered as a rectangular multilayer plate made up of isotropic layers with constant thickness. The temperature on the side surface of the plate is zero. Convective heat transfer occurs on outer surfaces of the plate; on layers' interfaces film heat sources are arranged.

The heat conduction equation for an arbitrary plate layer after the Laplace transformation on time is reduced to the functional equation. In the same way initial and boundary conditions are transformed. A solution of the functional equation we search in the form of three space functions product. That enables us to get the system of ordinary differential equations. We represent the system solution as double trigonometrical series taking into account boundary conditions on the plate side surface.

Series expansion factors are determined from a system of linear algebraic equations which is formed of boundary conditions on outer surfaces and layers' interfaces. The system right member contains factors of expansion of interlayer film heat source functions. After determination of factors a transform of the required function is found by the second expansion theorem, and the problem solution has the form of double trigonometrical series.

As an example, we solved the nonstationary heat conduction problem for a five-layer glazing element of the airplane under heating by the film heat source. The heat source has the rectangular form. It is arranged between the first and the second layers of the glazing element. The comparative analysis of the temperature distribution over the element thickness with the results of other method is carried out.

The method offered can be used for designing a safe multilayer glazing under operational and emergency thermal and force loading in different vehicles.

**Keywords:** *safe multilayer glazing, nonstationary thermal conduction, film heat source.*

---

**Представлено: В.М. Лук'яненко / Presented by: M.V. Lukianenko**

**Рецензент В.І. Мельник / Reviewer: V.I. Melnik**

*Подано до редакції / Received: 10.03.2016*