УДК 519.718

Стійкість МТА, як лінійної системи, при випадкових збуреннях його параметрів

Є.І. Калінін

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка (м. Харків, Україна), kalininhntusg@gmail.com

В загальному випадку динаміка функціонування сільськогосподарського машино-тракторного агрегату представляється у вигляді детермінованого процесу, який може бути описаний системою диференційних рівнянь. При цьому питання стійкості такої детермінованої системи вирішується за рахунок введення коефіцієнтів, які також не мають стохастичної складової. Проте, вплив зовнішніх факторів на експлуатаційні показники машино-тракторного агрегату носить достатньо суттєвий ймовірностний характер, що також необхідно враховувати при визначенні стійкості МТА. Особливу увагу в розрахунках необхідно приділяти формуванню стохастичної складової у вигляді «білого шуму», який формується як коливаннями окремих елементів машино тракторного агрегату, так і гармонійними змінами значень висот нерівностей опорної несучої поверхні і значень гакового навантаження, яке формується питомим опором сільськогосподарської, або транспортної (транспортно-технологічної), машини. Статтю присвячено питанню стійкості машино-тракторного агрегату, який розглядається як детермінована система, яка може бути описана рівняннями певного порядку з коефіцієнтами, значення яких мають певний стохастичний характер. Розглянуто формування стохастичного диференційного рівняння системи при впливі на останню випадкових сил у вигляді «білого шуму». Отримані необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному, що переходять у відсутність шуму в умовах Рауса-Гурвіца. Доведено, що для асимптотичної стійкості необхідно та достатньо, щоб існувала визначено-додатна квадратична форма. Наведені також достатні умови стійкості моментів більш високого порядку. В результаті теоретичних досліджень встановлено, що отримані умови стійкості в середньому квадратичному вимагають обчислення всього $n+1$ визначників, старший з яких має порядок n. При цьому виявляється, що перші n визначників ті ж, що і визначники $\Delta_k (k=1,2,...,n)$, що входять до критерія Рауса-Гурвіца. Останній же визначник виходить заміною в Δ_n першого рядка рядком, складеним за певним правилом з коефіцієнтів α_{ij} кореляційної матриці.

Ключові слова: *лінійна детермінована система, випадкові збурення, асимптотична стійкість, «білий шум»*

Вступ. Реалізація тягової динаміки машино-тракторного агрегату (МТА) є однією з найбільш актуальних завдань забезпечення його ефективної і безпечної роботи. Динаміка тракторного агрегату розглядається при русі в тяговому режимі і гальмуванні. В обох режимах руху важливим є забезпечення стійкості машино-тракторного агрегату проти складання. Особливо важливим дане питання є для транспортних агрегатів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Динаміці руху машино-тракторних агрегатів присвячено значну кількість наукових досліджень [1 - 5, 12 - 14]. Об'єктом досліджень більшості робіт було підвищення ефективності використання машинно-тракторних агрегатів на транспортних і технологічних сільськогосподарських операціях [3 - 5]. При цьому стійкість руху агрегату на базі колісного енергетичного засобу розглядалася як в тяговому [5], так і в гальмівному режимах [6, 7]. Проте, в більшості випадків, динаміка стійкості агрегату розглядалась як детермінований процес, що описується звичайними диференційними рівняннями. Однак, як відомо, вплив зовнішніх факторів на енергетичний засіб та сільськогосподарське знаряддя має стохастичний характер і вносить суттєві зміни в розроблювану динамічну модель.

Постановка мети досліджень. Таким чином, метою дослідження є аналіз стійкості лінійної системи, яка описується рівняннями n-го порядку з випадковими коефіцієнтами для визначення необхідних та достатніх умов асимптотичної стійкості в середньому квадратичному.

Виклад основного матеріалу. Припустимо, що деяка детермінована система описується лінійним диференціальним рівнянням порядку n з постійними коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + ... + \alpha_n y = 0 . \quad (1)$$

При впливі на таку систему випадкових сил типу «білого шуму» рівняння (1) перейде в наступне стохастичне диференціальне рівняння:

$$y^{(n)} + [\alpha_1 + \dot{\eta}_1(t)]y^{(n-1)} + ... + [\alpha_n + \dot{\eta}_n(t)]y = 0 . \quad (2)$$

Передбачається, що гаусові «білі шуми» $\xi_1(t)$, ..., $\dot{\xi}_n(t)$ мають нульове математичне очікування, але можуть, взагалі кажучи, бути корельованими так що:

$$M\dot{\eta}_1(t)\dot{\eta}_j(s) = 2\alpha_{ij}\delta(t-s) .$$

Як відомо, від шумів $\dot{\eta}_1(t)$, ..., $\dot{\eta}_n(t)$ можна перейти до незалежних «білих шумів» $\dot{\xi}_1(t)$, ..., $\dot{\xi}_n(t)$, з нульовим математичним очікуванням і кореляційної матрицею $2\delta_{ij}(t-s)$ за допомогою формул:

$$\dot{\eta}_1(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\dot{\xi}_j(t) , \quad (3)$$

де матриця $\|\alpha_{ij}\|$ така, що:

$$\|\alpha_{ij}\| \cdot \|\alpha_{ji}\| = \|\alpha_{ij}\| .$$

Рівняння (2) в подальшому розуміється як система стохастичних диференціальних рівнянь Іто [8], яку, враховуючи (3) і вводячи позначення:

$$y = X_1 , \ y' = X_2 ,..., y^{n-1} = X_n ,$$

можна записати у вигляді

$$dX_1 = X_2 dt , \ dX_2 = X_3 dt ,..., dX_{n-1} = X_n dt$$

$$dX_n = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{n-i+1} dt - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_{n-i+1} d\xi_j(t) , \quad (4)$$

Як відомо, існує єдиний строго марковский процес з безперервними траєкторіями $X^x(t) = (X_1^x(t),..., X_n^x(t))$, що задовольняє системі (4) при початковій умові $X^x(0) = x$.

З процесом $X^x(t)$ тісно пов'язаний диференційний оператор другого порядку:

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{n-i+1} \frac{\partial}{\partial x_n} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} , \quad (5)$$

який при дослідженні стійкості марковских процесів відіграє таку ж роль, як оператор Ляпунова в стійкості детермінованих систем.

Слідуючи [9 - 11], будемо говорити, що система (4) асимптотично p-стійка $(p > 0)$, якщо $\lim M|X^x(t)|^p = 0$ при $t \to \infty$ і, крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $M|X^x(t)| < \varepsilon$, якщо $|x| < \delta$ (тут через $|x|$ позначена евклідова норма вектору x). Назвемо систему (4) асимптотично стійкою в середньому квадратичному, якщо вона стійка при $p = 2$.

Метод отримання необхідних і достатніх умов стійкості в середньому квадратичному довільної лінійної системи з «білими шумами» вказано в роботі [11], де розглядається відмінне від прийнятого в цій роботі розуміння лінійної стохастичної системи. Однак умови, що виходять таким методом, досить громіздкі: для їх перевірки треба обчислювати n^2 визначників, старший з яких має порядок n^2 .

В роботі [12] доведено, що для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному стаціонарної лінійної стохастичною системи необхідно і достатньо, щоб для будь-якої визначено-додатної квадратичної форми $W(x)$ знайшлася інша визначено-додатна квадратична форма $V(x)$, для якої $LV(x) = -W(x)$. Ця теорема дозволяє отримати (що було відзначено також в роботі [9]) алгебраїчні критерії для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному такої системи. Однак, ці критерії призводять до ще більш громіздким обчисленням навіть в детермінованому випадку.

Як показано в [11], для асимптотичної стійкості в середньому квадратичної системи (4) необхідно, щоб система «без випадковостей»

$$dX_1 = X_2 dt , \ dX_2 = X_3 dt ,..., dX_{n-1} = X_n dt ,$$

$$dX_n = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{n-i+1} ; \quad (6)$$

була асимптотично стійка, тобто щоб виконувалися умови Рауса-Гурвіца

$$\Delta_1 = \alpha_1 > 0 , \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} ,$$

Відомо, що при виконанні цих умов існує визначено-додатна квадратична форма, для якої повна похідна в силу (6)

$$L_0 V = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{n-i+1} \frac{\partial V}{\partial x_n} \quad (7)$$

являє собою наперед задану відмінно-визначену форму.

Припустимо, для початку, що квадратична форма

$$\alpha(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_{n-i+1}x_{n-j+1}\ ,(\alpha_{ij}=\alpha_{ji})\ ,$$

визначено-додатна. Тоді можна казати про те, що для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному системи (4) необхідно і достатньо, щоб існувала визначено-додатна квадратична форма

$$V(x)=\sum_{i,j=1}^{n}d_{ij}x_ix_j\ ,$$

яка задовольняє умовам

$$L_0V(x)=-\alpha(x)\ ,\ d_{nn}<\frac{1}{2}\ . \qquad (8)$$

Справді, нехай існує квадратична форма $V(x)$ з коефіцієнтами d_{ij}, яка задовольняє визнаним умовам. В силу (5), (7) і (8):

$$LV=L_0V+\alpha(x)\frac{\partial^2V}{\partial x_n^2}=(2d_{nn}-1)\alpha(x)<0$$

За теоремою роботи [11] це означає, що система (4) асимптотично стійка в середньому квадратичному.

З іншого боку, в разі асимптотичної стійкості системи (4) з тієї ж теоремі існує визначено-додатна квадратична форма

$$V_1(x)=\sum_{i,j=1}^{n}e_{ij}x_ix_j\ ,$$

для якої $LV_1(x)=-\alpha(x)$, тобто

$$L_0V_1=LV-\alpha(x)\frac{\partial^2V}{\partial x_n^2}=-(2e_{nn}+1)\alpha(x)\ .$$

Таким чином $V=\dfrac{V_1(x)}{(2e_{nn}+1)}$, і, отже $d_{nn}=\dfrac{e_{nn}}{(2e_{nn}+1)}<\dfrac{1}{2}$.

Для отримання бажаних умов досить виразити коефіцієнт d_{nn} в формі $V(x)$, яка визначається з рівняння (8), через параметри α_i, α_{ij} системи (4).

З цією метою позначимо через $X^{\circ}_{1j}(t),\dots X^{\circ}_{nj}(t)\quad (j=1,2,...,n)$ фундаментальну систему розв'язків детермінованих рівнянь (6), яка визначається початковими умовами $X^{\circ}_{sj}(0)=\delta_{sj}$. Тоді будь-який розв'язок цих рівнянь з початковими умовами $X^{\circ x}_{i}(0)=x_i\quad (i=1,2,...,n)$ запишеться у вигляді:

$$X^{\circ x}_{i}(t)=\sum_{j=1}^{n}x_jX^{\circ}_{ij}(t)\ .$$

Як відомо, функцію $V(x)$, що задовольняє співвідношенню (8), можна представити у вигляді:

$$V(x)=\int_0^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}X^{\circ x}_{n-i+1}(u)X^{\circ x}_{n-j+1}(u)du\ .$$

Остання рівність дозволяє виразити коефіцієнти d_{ij} форми $V(x)$ і, зокрема, коефіцієнт d_{nn} через фундаментальну систему розв'язків $X^{\circ}_{ij}(t)$, а потім і через коефіцієнти α_i, α_{ij}. Дійсно:

$$d_{nn}=\frac{1}{2\Delta_n}\sum_{r=0}^{n-1}q_{nn}^{(r)}\Delta_{1,r+1}\ , \qquad (9)$$

де $\Delta_{1,r+1}$ – алгебраїчне доповнення елемента першого рядка і $r+1$ стовпця останнього визначника Гурвіца Δ_n, а числа $q_{nn}^{(r)}$ пов'язані з коефіцієнтами α_{ij} форми $\alpha(x)$ формулою:

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{n-i+1,n-j+1}D_{ni}(\lambda)D_{nj}(-\lambda)&=\\ =\sum_{r=0}^{n-1}q_{nn}^{(r)}\lambda^{(n-r-1)}&\end{aligned}\ ; \qquad (10)$$

Тут $D_{nj}(\lambda)$ алгебраїчне доповнення елемента n-го рядка і j-го стовпця визначника $D(\lambda)$ системи (4):

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1-\lambda\end{vmatrix}$$

Легко бачити, що $D_{ni}(\lambda)D_{nj}(-\lambda)=(-1)^{i+j-1}\lambda^{j-2}$. Тому з (9) отримуємо:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{p+q=2(n-k)}(-1)^{q+1}\alpha_{pq}\right)\lambda^{2k}=\sum_{k=0}^{n-1}q_{nn}^{(n-k-1)}\lambda^{2k}\ ,$$

$$q_{nn}^{(n-k-1)}=\sum_{p+q=2(n-k)}(-1)^{q+1}\alpha_{pq}\ . \qquad (11)$$

З рівнянь (9) та (10) випливає, що у випадку, коли $\alpha(x)$ являє собою додатно-визначену квадратичну форму, для стійкості в середньому квадратичному системи (4) необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:

$$\Delta_1 > 0, \ldots \Delta_n > 0, \Delta_n > \Delta, \qquad (12)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} & q_{nn}^{(1)} & q_{nn}^{(2)} & \cdots & q_{nn}^{(n-1)} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} \qquad (13)$$

відрізняється від останнього визначника Гурвіца Δ_n лише першою строкою. При цьому числа $q_{nn}^{(r)}$ ($r = 0,1,\ldots,n-1$) можуть бути визначені через коефіцієнти α_{ij} матриці кореляції за формулами (11).

Покажемо, що умови (11) – (13) залишаються в силі й без припущення про додатну визначеність квадратичної форми $\alpha(x)$. Для цього, наряду з системою (4), розглянемо іншу систему:

$$dX_1 = X_2 dt, \; dX_2 = X_3 dt, \ldots, dX_{n-1} = X_n dt,$$

$$dX_n = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{n-i+1} dt - - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_{n-i+1} d\xi_j + \varepsilon X_1 d\eta_1 + . + \varepsilon^2 \sum_{i=2}^{n} X_i d\eta_i \qquad (14)$$

де $\eta_1(t)$, …, $\eta_n(t)$ – незалежні між собою та від $\xi_1(t)$, …, $\xi_n(t)$ вінеровські процеси, а ε – малий параметр.

Легко бачити, що оператор, який відповідає системі (14), має вигляд:

$$L_\varepsilon = L + \left(\varepsilon^2 x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon^4 x_i^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Оскільки квадратична форма

$$\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x) + \varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon^4 \sum_{i=2}^{n} x_i^2$$

визначено-додатна при будь-якому значенні $\varepsilon > 0$, то для асимптотичної стійкості в середньому квадратичної форми (14) необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:

$$\Delta_1 > 0, \ldots \Delta_n > 0, \Delta_n > \Delta_\varepsilon,$$

де

$$\Delta_\varepsilon = $$

$$= \begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} + \varepsilon^4 & q_{nn}^{(1)} - \varepsilon^4 & q_{nn}^{(2)} + \varepsilon^4 & \cdots & (-1)^{n-1}(\alpha_{nn} + \varepsilon^2) \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} = . \qquad (15)$$

$$= \Delta + (-1)^{n-1} \varepsilon^2 \Delta_{1n} + \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \Delta_{1i}$$

Висновок. Таким чином, отримані необхідні і достатні умови стійкості в середньому квадратичному системи (2) або (4), що вимагають обчислення всього $n+1$ визначників, старший з яких має порядок n. При цьому виявляється, що перші n визначників ті ж, що і визначники $\Delta_k (k = 1,2,...,n)$, що входять до критерія Рауса-Гурвіца для рівняння (1). Останній же визначник виходить заміною в Δ_n першого рядка рядком, складеним за певним правилом з коефіцієнтів α_{ij} кореляційної матриці. Якщо всі $\alpha_{ij} = 0$, то критерій (11) – (13) переходить в критерій Рауса-Гурвіца.

Література

1. Ясеневич В.Е. Исследование тракторного поезда, прицеп которого имеет ведущую ось / В.Е. Ясеневич/ Исследование работы тракторного поезда в сельскохозяйственном производстве. Труды НАТИ. – 1964, – № 175. – С. 3 - 44.

2. Гячев Л.В. Динамика машинно-тракторных агрегатов / Л.В. Гячев, – Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского госуниверситета, 1976. – 192 с.

3. Лонарев А.А. Основные показатели эффективности сельскохозяйственных тракторно-технологических агрегатов по динамическому паспорту / А.А. Лонарев, В.И. Судницин, К.В. Новиков, В.В. Бронников // Тракторы и сельхозмашины. – 2009, – №6. – С. 31- 33.

4. Камбулов С.И. Механико-технологическое обоснование повышения эффективности функционирования сельскохозяйственных агрегатов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.20.01 – технологии и средства механизации сельского хозяйства/ С.И. Камбулов. – Краснодар, 2008. – 32 с.

5. Терехин С.А. Методика оценки влияния переменных внешних воздействий на машинно-тракторный агрегат с учетом современных характеристик двигателя и трактора / С.А. Терехин, С.Ю. Журавлев, В.Н. Котельников // Вестник КрасГАУ. – 2009, – №11. – С. 171 -175.

6. Парфенов А.П. Некоторые вопросы динамики торможения тракторных поездов: автореф. дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.05.03 – автомобили и тракторы / А.П. Парфенов, – М.: 1964. – 20 с.

7. Брыков А.С. Обоснование требований к тормозным системам тракторного поезда / А.С. Брыков, Н.А. Свиянский // Исследование работы и оптимизация параметров тракторных трансмиссий. Труды НАТИ, – 1977. – № 254. – С. 59 - 68.

8. Кац. Н.Я. Об устойчивости систем со случайными параметрами / Н.Я. Кац, Н.Н. Красовский // Прикладная математика и механика. – 1960. – № 24. – С. 25 - 33.

9. Хасьминский Р.З. Об устойчивости траектории марковских процессов / Р.З. Хасьминский // Прикладная математика и механика. – 1962. – № 26. – С. 1025 -1032

10. Работников Ю.Л. О невозможности стабилизации системы в среднем квадратическом случайными возмущениями ее параметров / Ю.Л. Работников // Прикладная математика и механика. – 1964. – № 28. – С.935 - 940.

11. Малкин И.Г. О построении функции Ляпунова для системы линейных уравнений / И.Г. Малкин // Прикладная математика и механика. – 1952. – № 16. – С. 654 - 661

12. Калінін Є.І. Формування умови стійкості лінійної системи при випадкових збуреннях її параметрів / Є.І. Калінін, В.М. Романченко, Г.П. Юр'єва // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів – 2017. – № 7. – С. 100 -108.

13. Калінін Є.І. Динаміка коренезбиральної машини з системою підтримання глибини ходу робочих органів / Є.І. Калінін, С.О. Поляшенко, О.В. Єсіпов // Інженерія природокористування. – 2017. – № 2(8). – С. 63 - 68

14. Калінін Є.І. Частотно-динамічна маремачна модель тракторного агрегату з передачею крутного моменту до рушіїв сільськогосподарської машини / Є.І. Калінін // Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка. Х.: ХНТУСГ, 2015. – Вип. 156. – С. 327 - 334.

References

1. Yasenevich V.E. Issledovanie traktornogo poezda, pricep kotorogo imeet vedushuyu os / V.E. Yasenevich // Issledovanie raboty traktornogo poezda v selskohozyajstvennom proizvodstve. Trudy NATI. – 1964, – № 175. – S. 3 - 44.

2. Gyachev L.V. Dinamika mashinno-traktornyh agregatov / L.V. Gyachev, – Rostov-na-Donu. Izd-vo Rostovskogo gosuniversiteta, 1976. – 192 s.

3. Lonarev A.A. Osnovnye pokazateli effektivnosti selskohozyajstvennyh traktorno-tehnologicheskih agregatov po dinamicheskomu pasportu / A.A. Lonarev, V.I. Sudnicin, K.V. Novikov, V.V. Bronnikov // Traktory i selhozmashiny. – 2009, – №6. – S. 31 - 33.

4. Kambulov S.I. Mehaniko-tehnologicheskoe obosnovanie povysheniya effektivnosti funkcionirovaniya selskohozyajstvennyh agregatov: avtoref. dis. ... d-ra tehn. nauk: 05.20.01 – tehnologii i sredstva mehanizacii selskogo hozyajstva / S.I. Kambulov. – Krasnodar, 2008. – 32 s.

5. Terehin S.A. Metodika ocenki vliyaniya peremennyh vneshnih vozdejstvij na mashinno-traktornyj agregat s uchetom sovremennyh harakteristik dvigatelya i traktora / S.A. Terehin, S.Yu. Zhuravlev, V.N. Kotelnikov // Vestnik KrasGAU. – 2009, – № 11. – S. 171 -175.

6. Parfenov A.P. Nekotorye voprosy dinamiki tormozheniya traktornyh poezdov: avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk: spec. 05.05.03 – avtomobili i traktory / A.P. Parfenov, – M.: 1964. – 20 s.

7. Brykov A.S. Obosnovanie trebovanij k tormoznym sistemam traktornogo poezda / A.S. Brykov, N.A. Sviyanskij // Issledovanie raboty i optimizaciya parametrov traktornyh transmissij. Trudy NATI, – 1977. – № 254. – S. 59 - 68.

8. Kac N.Ya. Ob ustojchivosti sistem so suchajnymi parametrami / N.Ya. Kac, N.N. Krasovskij // Prikladnaya matematika i mehanika. – 1960. – № 24. – S. 25 - 33.

9. Hasminskij R.Z. Ob ustojchivosti traektorii markovskih processov / R.Z. Hasminskij // Prikladnaya matematika i mehanika. – 1962. – №26. – S. 1025 -1032.

10. Rabotnikov Yu.L. O nevozmozhnosti stabilizacii sistemy v srednem kvadraticheskom suchajnymi vozmusheniyami ee parametrov / Yu.L. Rabotnikov // Prikladnaya matematika i mehanika. – 1964. – № 28. – S.935 - 940.

11. Malkin I.G. O postroenii funkcii Lyapunova dlya sistemy linejnyh uravnenij / I.G. Malkin // Prikladnaya matematika i mehanika. – 1952. –№16. – S. 654 - 661.

12. Kalinin E.I. Formuvannya umovi stijkosti linijnoyi sistemi pri vipadkovih zburennyah yiyi parametriv / E.I. Kalinin, V.M. Romanchenko, G.P. Yur'yeva // Tehnichnij servis agropromislovogo, lisovogo ta transportnogo kompleksiv – 2017. – № 7. – S. 100 -108.

13. Kalinin E.I. Dinamika korenezbiralnoyi mashini z sistemoyu pidtrimannya glibini hodu robochih organiv / E.I. Kalinin, S.O. Polyashenko, O.V. Yesipov // Inzheneriya prirodokoristuvannya. – 2017. – №2(8). – S. 63 - 68.

14. Kalinin E.I. Chastotno-dinamichna marematichna model traktornogo agregatu z peredacheyu krutnogo momentu do rushiyiv silskogospodarskoyi mashini / E.I. Kalinin // Visnik HNTUSG im. P.Vasilenka. H.: HNTUSG, 2015. – Vip. 156. – S. 327 - 334.

Аннотация

Устойчивость МТА, как линейной системы, при случайных возбуждениях его параметров

Е.И. Калинин

В общем случае динамика функционирования сельскохозяйственного машинно-тракторного агрегата представляется в виде детерминированного процесса, который может быть описан системой дифференциальных уравнений. При этом вопрос устойчивости такой детерминированной системы решается за счет введения коэффициентов, которые также не имеют стохастической составляющей. Однако, влияние внешних факторов на эксплуатационные показатели машинно-тракторного агрегата носит достаточно существенный вероятностный характер, что также необходимо учитывать при определении устойчивости МТА. Особое внимание в расчетах необходимо уделять формированию стохастической составляющей в виде «белого шума», который формируется как колебаниями отдельных элементов машинно-тракторного агрегата, так и гармоничными изменениями значений высот неровностей опорной несущей поверхности и значений крюковой нагрузки, которая формируется удельным сопротивлением сельскохозяйственной или транспортной (транспортно-технологической), машины. Статья посвящена вопросу устойчивости машинно-тракторного агрегата, рассмотренного как детерминированная система, которая может быть описана уравнениями определенного порядка с коэффициентами, значения которых имеют определенный стохастический характер. Рассмотрено формирование стохастического дифференциального уравнения системы при воздействии на последнюю случайных сил в виде «белого шума». Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном, переходящие в отсутствие шума в условиях Рауса-Гурвица. Доказано, что для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовала определенно-положительная квадратичная форма. Приведены также достаточные условия устойчивости моментов более высокого порядка. В результате теоретических исследований установлено, что полученные условия устойчивости в среднем квадратичном требуют вычисления всего $n+1$ определителей, старший из которых имеет порядок n. При этом оказывается, что первые n определителей те же, что и определители $\Delta_k (k = 1,2,...,n)$, входящие в критерия Рауса-Гурвица. Последний же определитель получается заменой в Δ_n первой строки строкой, составленной по определенному правилу из коэффициентов α_{ij} корреляционной матрицы.

Ключевые слова: *линейная детерминированная система, случайные возбуждения, асимптотическая устойчивость, «белый шум»*

Abstract

Stability of MTA, as a linear system, with random excitations of its parameters

E.I. Kalinin

In general, the dynamics of the functioning of the agricultural machine-tractor aggregate is represented in the form of a deterministic process, which can be described by a system of differential equations. The stability of such a deterministic system is solved by introducing coefficients that also do not have a stochastic component. However, the influence of external factors on the operational characteristics of the machine-tractor aggregate is of a fairly significant probabilistic nature, which must also be taken into account in determining the stability of the MTA. Particular attention in the calculations should be given to the formation of a stochastic component in the form of "white noise", which is formed both by the oscillations of individual elements of the machine and tractor unit, and by harmonious changes in the heights of the unevenness of the supporting bearing surface and the hook load values, which is formed by the resistivity of the agricultural or transport transport-technological), machines. The article is devoted to the stability of the machine-tractor aggregate, considered as a deterministic system, which can be described by equations of a certain order with coefficients whose values have a certain stochastic character. The formation of the stochastic differential equation of the system under the influence of the last random forces in the form of "white noise" is considered. Necessary and sufficient conditions for asymptotic stability in the mean quadratic form are obtained, passing in the absence of noise in the Routh-Hurwitz conditions. It is proved that for asymptotic stability it is necessary and sufficient that there exists a definite-positive quadratic form. Sufficient conditions for the stability of higher-order moments are also presented. As a result of theoretical studies it was established that the obtained conditions for stability in the mean quadratic require the calculation of all determinants, the oldest of which is of order. It turns out that the first determinants are the same as the determinants entering into the Routh-Hurwitz criterion. The last determinant is obtained by replacing in the first line with a string compiled according to a particular rule from the coefficients of the correlation matrix.

Keywords: *linear deterministic system, random excitations, asymptotic stability, "white noise"*

Представлено від редакції: А.Т. Лебедєв / Presented on editorial: A.T. Lebedjev
Рецензент: М.Л. Шуляк / Reviewer: M.L. Shuljak
Подано до редакції / Received: 19.06.2018